

Ungerade Zahlen	Z	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	usw.
$Z^2 - 1$		<u>0</u>	8	<u>24</u>	<u>48</u>	80	<u>120</u>	<u>168</u>	224	<u>288</u>	<u>360</u>	.....	
$Z^2 + 1$		2	10	26	50	82	122	170	226	290	362	.....	
$Z^2 + 3$		4	<u>12</u>	28	52	<u>84</u>	124	172	<u>228</u>	292	364	.....	
$Z^2 + 5$		<u>6</u>	14	<u>30</u>	<u>54</u>	86	<u>126</u>	<u>174</u>	230	<u>294</u>	<u>366</u>	.....	
$Z^2 + 7$		8	16	32	56	88	128	176	232	296	368	.....	

Zuerst einige Informationen über die Entstehung dieser Tabelle

aus im Moment 10 Spalten, - und aus 5 Zeilen, die nach rechts fortgeschrieben werden können. Damit Du dafür ein Gespür bekommst, ergänze bitte zuerst die 11. Spalte, also die unter 21. Dazu musst Du wissen, wie berechnet wird: Die Zahl 126 in der 4. Zeile und der 6. Spalte bekommt man dadurch, dass man 11 für das Z in  $Z^2 + 5$  einsetzt, damit  $11^2 + 5$  erhält und dies dann ausrechnet (Wissen muss man dazu  $11^2 = 11 \cdot 11 = 121$ ).

In dieser Tabelle stecken viele interessante Zusammenhänge!

Zum Beispiel kann man sich für die Vielfachen von 3 interessieren. (Wir haben diese oben schon besonders hervorgehoben.), oder aber für die Vielfachen von 8. Zu sehen ist u.a.

Zusammenhang 1

In jeder Spalte gibt es mindestens eine durch 3 teilbare Zahl, und in jeder Spalte gibt es höchstens zwei durch 3 teilbare Zahlen. („teilbar“ ohne Zusatz bedeutet: Rest 0 bzw. Vielfaches von 3).

Dafür gibt es eine Begründung 1

Teilt man alle in einer Spalte stehende Zahlen durch 2, so bleiben stets 5 direkt hintereinander liegende natürliche Zahlen übrig. Dividiert man 5 solche hintereinanderliegende natürliche Zahlen durch 3, so erhält man als zugehörige Aufeinanderfolge von Resten entweder 012 01 oder 12 012 oder 2 012 0, und darin mindestens einmal und höchstens zweimal den Rest 0.

Zusammenhang 2

In der ersten Zeile sind alle Zahlen Vielfache von 8 .

Begründung 2

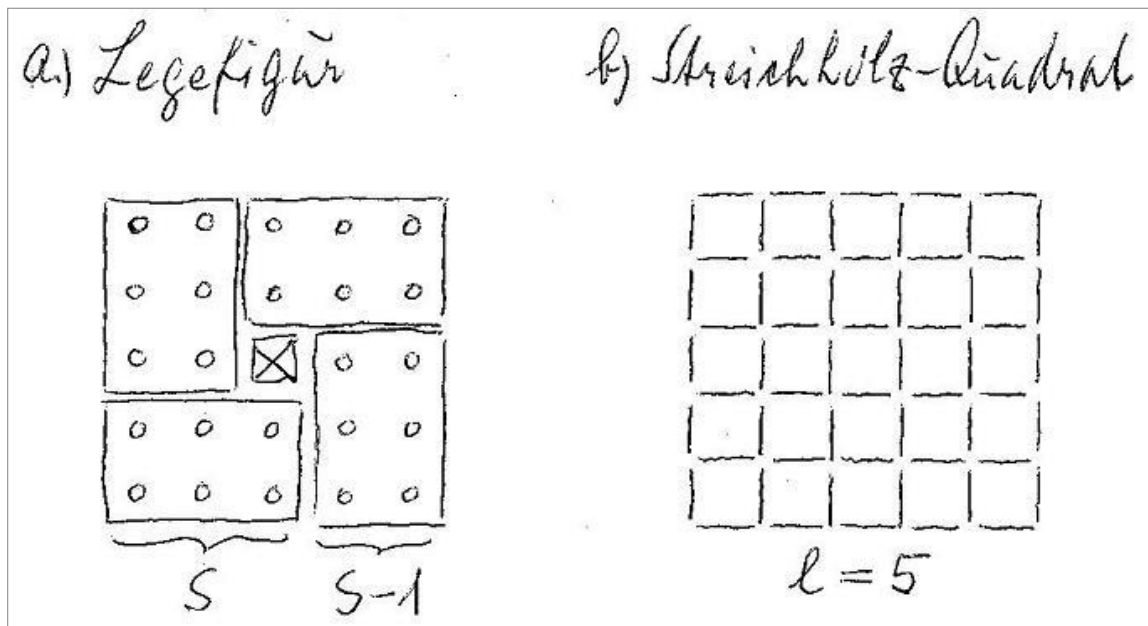
Die Begründung liefert Aufgabe 2 (Es darf also auch auf Bekanntes verwiesen werden)

**Was sollst Du tun ?**

In der Tabelle stecken noch viele weitere - ähnliche oder andere - Zusammenhänge. Diese sollst Du suchen und dann so genau formulieren, dass der Leser weiß, was Du meinst. Dazu musst Du allerdings nicht unbedingt die oben verwendete Erwachsenensprache benutzen.

Du sollst auch jeweils nach Begründungen suchen und diese für den Leser verständlich aufschreiben.

Mit der Suche und dem Aufschreiben aufhören solltest Du erst dann, wenn Du in der Tabelle mindestens 7 weitere Zusammenhänge und vielleicht auch die zugehörigen Begründungen gefunden hast. Vielleicht entdeckst Du ja auch noch einiges mehr?!



a) Katrin und Fritz, zwei muntere und an Mathematik interessierte Zwillinge der 6. Klasse, sind für einen längeren Ferienbesuch bei ihren Großeltern auf dem Lande. Auch dort auf kleine Abenteuer aus, durchstöbern sie die alten Gebäude des kleinen Gutes und machen dabei eine wundersame Entdeckung. Hoch oben in einer Dachkammer gibt es Bücher über Bücher, aber nicht die heutigen im Kunststoffeinband, sondern verstaubte alte, bei denen manche Seite fehlt oder beschmiert ist. Und siehe da, es ist auch Mathematisches zu finden, nämlich auf einem eingelegten Blatt die obige Skizze, welche mit „griechische Legefiguren“ überschrieben ist.

Aufgeregt laufen Sie zu Ihrem Opa, der gerade zusammen mit seinem Freund eine Schachpartie analysiert. Dieser will sich einerseits dabei nicht groß stören lassen, andererseits jedoch auch etwas für seine Enkelkinder tun. Deshalb erklärt er, dass die Skizze von seinem eigenen Opa stammt und dass sie aufzeigt, wie die alten Griechen vor mehr als 2000 Jahren den folgenden Satz bewiesen hätten:

*Ist  $Z$  eine ungerade Zahl, so ist  $Z^2 - 1$  ein Vielfaches von 8*

Er wirft seinen Enkeln noch einige Beispiele zu - nämlich  $Z = 3$ ,  $Z^2 - 1 = 8$ , und  $Z = 5$ ,  $Z^2 - 1 = 24$  und schließlich  $Z = 23$ ,  $Z^2 - 1 = 528$  -, erklärt, dass die Griechen als Heteromeke ein Rechteck bezeichneten, bei dem eine der Seiten um genau 1 länger ist als die andere, und lässt sie dann allein mit der Aufgabe zu zeigen, dass dieser Satz wirklich für alle ungeraden  $Z$  Gültigkeit hat, also auch für 1001, 21099 und 987654321 .

Deine Aufgabe besteht darin, den beiden Zwillingen Paroli zu bieten und den geforderten Nachweis so gut aufzuschreiben, dass der offensichtlich auch mathematisch recht bewanderte Opa sofort und gut versteht, dass auch Du weißt, wie die alten Griechen den Satz bewiesen hätten.

b) Da Katrin und Fritz den Beweis bald gefunden hatten, war ihre mathematische Abenteuerlust so angeregt, dass sie von ihrem Opa eine weitere Aufgabe haben wollten. Und dieser war davon so angetan, dass ihm schnell etwas Passendes einfiel, ohne dass er dafür in die Dachkammer kraxeln musste:

*Zu zeigen ist, dass für alle aus Streichhölzern gelegte quadratische Kästchenfiguren (der obigen Art) die Zahl der benötigten Streichhölzer ein Vielfaches von 4 ist.*

Und diese Aufgabe ist auch eine schöne Aufgabe für Dich, wobei es uns wieder vor allem wichtig ist, dass Du Deine Lösung gut aufschreibst.

# HTMB

## INFORMATIONEN UND ANLEITUNG

Als erstes solltest Du alle Aufgaben überfliegen und dann mit der Dir am einfachsten oder am interessantesten erscheinenden beginnen. Die Aufgaben müssen nicht in der vorgegebenen Reihenfolge bearbeitet werden.

Vor der Bearbeitung der einzelnen Aufgaben solltest Du den Einzelheiten im jeweiligen Aufgabentext viel Aufmerksamkeit gönnen. Jedoch solltest Du nicht zu viel Zeit für eine einzelne Aufgabe verwenden. Vorschlag: höchstens 30 Minuten

Wir haben jede Aufgabe auf ein eigenes Blatt geschrieben. Den freien Raum kannst Du für Notizen, Rechnungen, Antworten und Begründungen benutzen. Wenn dieser Platz nicht ausreicht, verwende bitte die Rückseite und, wenn nötig, ein weiteres Blatt Papier (auf dieses schreibe dann bitte auch Deinen Namen). Alle eventuell benutzten Kladdezettel sollen abgegeben werden. Auf keinen Fall sollst Du auf einem Blatt weiterrechnen, das zu einer anderen Aufgabe gehört.

Wir wollen nicht nur Deine Lösungen kennen lernen, sondern vor allem auch Deine Lösungswege und Begründungen, die Du uns kurz, aber trotzdem verständlich aufschreiben musst, damit wir Dir dafür Bewertungspunkte geben können.

Uns interessieren Deine guten Ideen in Deinen Aufgabenbearbeitungen (versehentliche Fehler werden nicht registriert!). Diese guten Ideen sollten alle hingeschrieben werden, oft reichen Stichworte aus. Auch Teillösungen sind für uns interessant. Und wenn Du bei einer Aufgabe mehrere Lösungswege siehst, schreib bitte auch diese alle auf.

Schreibe bitte mit einem Kugelschreiber oder mit einem Füller (verwende auf keinen Fall Radiergummi oder Tintenkiller).

*Viel Erfolg!*

Name \_\_\_\_\_

Vorname \_\_\_\_\_

Geburtsdatum \_\_\_\_\_

Bitte deutlich schreiben!